Десети български фестивал на младите математици

Трети кръг, Тема за 10 – 12 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Дадени са прости числа p_1, p_2, p_3 и p. Да се докаже, че съществуват цели числа x и y такива, че $y^2 \equiv p_1x^4 - p_1p_2^2p_3^2 \pmod{p}$.

Решение. Случаите $p \in \{p_1, p_2, p_3\}$ се проверяват лесно, така че нека $p \neq p_i$ за $i = 1, 2, 3$. За удобство, ще пишем $P = p_2p_3$ и обичайното означение $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ за символа на Льожандър. В случай, че P или $-P$ е квадратичен остатък по модул p, можем да изберем $y = 0$ и подходящо x. Вече ще считаме, че и двете са квадратични неостатъци – в частност, от мултипликативността на символа следва $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$.

Ако $\left(\frac{p_1}{p}\right) = 1$ избираме $x = 0$ и съответното y, така че нека $\left(\frac{p_1}{p}\right) = -1$. Следователно остава да докажем, че за някое x точно едно от $x^2 \pm P$ е квадратичен остатък по модул p. Да допуснем противното, т.е. $\left(\frac{x^2-P}{p}\right) = \left(\frac{x^2+P}{p}\right)$ за всяко x. Заместване на x с Px и използвайки мултипликативността на символа, получаваме $\left(\frac{Px^2-1}{p}\right) = \left(\frac{Px^2+1}{p}\right)$ за всяко x. Понеже P е квадратичен неостатък, следва че $\left(\frac{z-1}{p}\right) = \left(\frac{z+1}{p}\right)$ за $z = 0$ и за всеки неостатък z.

Да разгледаме множеството от квадратичните неостатъци и 0 по модул p. Мощността му е $\frac{p+1}{2} > \frac{p}{2}$ и следователно то съдържа два последователни елемента $z_0 - 1$ и z_0. Сега от горното за z индуктивно следва, че всеки остатък е 0 или неквадратичен, противоречие. С това задачата е решена.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I и пети на ъглополовящите през B и $C-$ B_1 и C_1 съответно. Нека S е средата на дъгата BAC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност(Ω) и нека ω_A е външновписаната окръжност срещу върха A на триъгълник ABC. Нека $\omega_A(I_A)$ допира AB и AC в точки D и E съответно и нека $SI \cap \Omega = \{S, P\}$. Нека M е средата на DE и нека N е средата на SI. Ако правите MN и AP се пресичат в точка K, то да се докаже, че $KI_A \perp B_1C_1$.

Решение. За да решим задачата ще са ни необходими 2 леми.

Лема 1. Нека M_B и M_C са средите на дъгите AB и AC от Ω. Тогава N е средата на отсечката M_BM_C.

Доказателство. След пресмятане на ъгли лесно се вижда, че фигурата M_BIM_CS е успоредник, откъдето твърдението следва.

Лема 2. Нека точка O е центърът на Ω. Тогава $I_AO \perp B_1C_1$.

Доказателство. Нека X и Y са пресечните точки на радикалната ос на Ω и ω_A с AB и AC. Тогава $XD^2 = XB.XA$, откъдето лесно следва, че $XA = \frac{p^2}{a+b}$ и аналогично $YA = \frac{p^2}{a+c}$. Така $\frac{XA}{YA} = \frac{a+c}{a+b} = \frac{AC_1}{AB_1} \Rightarrow XY||B_1C_1$. Последното означава, че $OI_A \perp B_1C_1$, което искахме да докажем.

Обратно към задачата, нека T е външният център на хомотетия(h), изпращаща Ω в ω_A. Нека F е допирната точка на ω_A с BC. Тогава от ъгли получаваме, че $\triangle M_BSM_C$ е хомотетичен на $\triangle DFE$. Следователно $h(M_BM_C) = DE$ и в частност $h(N) = M$, което означава, че $T \in MN$, както и $T \in OI_A$. Нека Ω_A е полувписаната окръжност срещу върха

A за $\triangle ABC$. Тогава от теорема за трите хомотетии за Ω, ω_A и Ω_A следва, че P(външен център на хомотетия, изпращаща Ω_A в Ω), (външен център на хомотетия, изпращаща Ω_A в ω_A) и T(външен център на хомотетия, изпращаща ω_A в Ω) лежат на една права. Последното означава, че $T \equiv K$, с което задачата е решена.

Задача 3. Даден е нетъпоъгълен триъгълник ABC ($BC > AC$) с височина CD ($D \in AB$), център на описаната окръжност O и среда M на страната AB. Точката E лежи на лъча BA и е такава, че $AE \cdot BE = DE \cdot ME$. Ако правата OE разполовява лицето на $\triangle ABC$ и $CO = CD \cos \sphericalangle ACB$, да се намерят ъглите на триъгълника ABC.

Решение. Ясно е, че E не е между A и B. Ако положим $AD = x$, $DB = y$, $AE = z$, то $AE.BE = DE.ME \Leftrightarrow z.(x+y+z) = (x+z).\frac{x+y+2z}{2} \Leftrightarrow x^2 + xy + xz - yz = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x+y+z}$, т.е. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{BE}$. Сега от теоремите на Менелай и Чева (или съображения с хармонично отношение) следва, че E лежи на правата през петите A_1 и B_1 на височините през върховете A и B, съответно. Нещо повече, изразяване на ъгли дава $CO \perp A_1B_1$, а от $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C$ (с коефициент $\cos \sphericalangle ACB$) следва, че разстоянието от C от A_1B_1 е $CD \cos \sphericalangle ACB$, т.е. CO. Следователно $O \in A_1B_1$ и A_1B_1 разполовява лицето на $\triangle ABC$. Сега от горното подобие получаваме $\cos \sphericalangle ACB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sphericalangle ACB = 45°$. Тогава $CH = AB$, където H е ортоцентърът, а пък $AB = R\sqrt{2} = CD$. Следователно $H \equiv D$ и $\sphericalangle BAC = 90°$. Оттук $\sphericalangle ABC = 45°$.

Задача 4. На Математическите боеве ученици решавали n задачи, като всеки ученик решил точно 3 задачи. За всеки двама има най-много една задача, която е решена и от двамата. Да се докаже, че s е естествено число, за което $s^2 - s + 1 < 2n$, то има s задачи, никои три от които не са решени от един ученик.

Решение. Нека t е най-голямото число със свойството: Има t задачи, никои три от които не са решени от един ученик. Да допуснем, че $t \leq s - 1$ и да означим множеството от тези t задачи с A. Тъй като t е най-голямото число с това свойство, за всяка задача $x \notin A$ съществуват две задачи $y, z \in A$, такива, че има ученик решил задачи x, y и z (в противен случай ще добавим задача x към A и ще увеличим t).

По този начин на всяка задача извън A съответства двойка от задачи от A. При това на различни задачи извън A съответстват различни двойки от A (в противен случай ще има ученик решил повече от 3 задачи). Следователно задачите извън A са по-малко от двойките задачи в A. От друга страна от $t \leq s - 1$ получаваме, че двойките задачи в A са най-много $\binom{s-1}{2}$, а извън A има поне $n - (s-1)$ задачи. Неравенството от условието е еквивалентно на $\binom{s-1}{2} < n - (s-1)$ и получаваме противоречие.

Задача 5. Нека $a > 0$ и $12a + 5b + 2c > 0$. Да се докаже, че не е възможно уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ да има два реални корена в интервала $(2; 3)$.

Решение. Да допуснем, че това се случва за корените x_1 и x_2. Разделяйки на $2a$ и ползвайки Виет, получаваме

$$62,5(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - 2,5)(x_2 - 2,5) > 0,25.$$

Но според допускането $|x_1 2,5| < 0,5$ и $|x_2 2,5| < 0,5$, така че получаваме абсурда $0,5.0,5 > 0,25$.

Задача 6. Съществува ли функция $f : N \to N$, за която

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

за всяко $n \geq 2$?

Отговор: Не. Да допуснем, че такава функция съществува. От даденото уравнение получаваме $f(n+1)-f(n) > 0$ за $n \geq 2$, т.е. f е строго растяща. Следователно $f(n) > f(2) = n-2 \geq n-1$ при $n \geq 2$.

Сега ще ограничим f отгоре. От даденото уравнение имаме $f(f(n-1)) < f(n+1)$ или $f(f(n) < f(n+1)$ За $n \geq 1$. Тъй като f е растяща получаваме, че или $f(n) = 1$ или $f(n) < n+2$ за $n \geq 1$, като и в двата случая $f(n) < n+2$. Следователно $n-1 \leq f(n) \leq n+1$ за $n \geq 2$.

Нека $n > 4$. Имаме $f(n-1) \geq 2$ за $n-1 \geq 2$ и като приложим долната граница, получаваме

$$f(f(n-1)) \geq f(n-1) - 1 \geq n-3.$$

От даденото уравнение имаме

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \leq (n+2) - (n-1) = 3$$

и следователно $n-3 \leq 3$ за $n > 4$, което е невъзможно.

Задача 7. Функцията $f(x)$ има за допустими стойности всички реални числа, приема реални стойности и е такава, че $f(x+1) = 2f(x)$ за всяко реално x и $f(x) = x(x-1)$ за всяко $x \in (0,1]$. Да се намери най-голямото реално число m, за което неравенството $f(x) \geq -\frac{8}{9}$ е изпълнено за всички $x \in (-\infty, m]$.

Решение. Индуктивно получаваме, че за всяко цяло n: $f(x) = 2^n(x-n)(x-n-1) = 2^n((x-\frac{2n+1}{2})^2 - \frac{1}{4})$ за $x \in (n, n+1]$. В частност, най-малката стойност в интервала $(n, n+1]$ се достига при $x = \frac{2n+1}{2}$ и е -2^{n-2}, което е поне $\frac{8}{9}$ точно при $n \leq 1$. Остава да съобразим, че $x \geq 2$ и $4(x-2)(x-3) \geq -\frac{8}{9}$ са изпълнени едновременно точно при $2 \leq x \leq \frac{7}{3}$. Така търсеното m е $\frac{7}{3}$.

Задача 8. Да се намерят всички полиноми f с цели коефициенти, такива че $f(p)|(p-3)! + \frac{p+1}{2}$ за всяко нечетно просто число p.

Решение. Да отбележим, че ако f изпълнява условието, то и $-f$ също го изпълнява и нека БОО старшият коефициент на f бъде положителен. Първо ще разгледаме случая, когато f е неконстантен. Тогава да допуснем, че $f(0) \neq 0$. От Лема на Шур имаме, че съществуват безбройно много прости числа q, делящи стойностите на полинома. Нека допуснем, че $f(-1) \neq 0$ и нека q е просто число, което дели $f(n)$ за някое естествено число n, както и $q > \max|f(-1)|, |f(0)$. Тогава т.к q не дели $f(0)$, то q не дели n. Следователно от Теоремата на Дирихле аритметичната прогресия с общ член $qk + n (k = 1, 2, \ldots)$ съдържа безбройно много прости числа. Нека p е едно от тях, като БОО можем да считаме, че $p-3 > q$. Следователно $q|f(p)|(p-3)! + \frac{p+1}{2}$, но $q|(p-3)!$, следователно $q|p+1$, откъдето следва, че $q|f(-1)$, което е невъзможно, защото $q > |f(-1)|$. Полученото противоречие показва, че $f(-1) = 0$, което означава, че $x+1|f(x)$. Като положим $p = 3$, получаваме, че $4|3$, противоречие. Следователно $f(0) = 0$, т.е съществува полином $g \in \mathbb{Z}[X]$, така че $f(x) = xg(x)$. Прилагайки същите разсъждения за g и т.н получаваме, че $f(x) = ax^n$ за някое a. Отново полагането $p = 3$ води до $a = 1$ и $n = 1$. Остана да докажем, че $p|(p-3)! + \frac{p+1}{2}$, но от Теоремата на Уилсън следва, че $(p-2).(p-3)! \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (p-3)! \equiv \frac{-1}{2} \pmod{p}$, откъдето твърдението следва. Ако f е константа, то $p = 3$ и $p = 5$ водят до $f \equiv 1$. Така окончателно всички решения са $f(x) = \pm x$ и $f(x) = \pm 1$.