Десети български фестивал на младите математици

Трети кръг, Тема за 6 – 7 клас

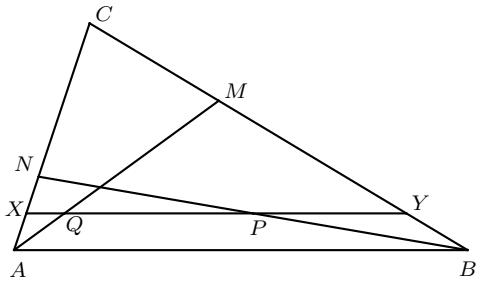
РЕШЕНИЯ

Задача 1. а) Даден е триъгълник ABC. На страната AC е избрана точка D, а на страната BC – точка E така, че отсечката DE е успоредна на AB. Докажете, че $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$.

б) Даден е триъгълник ABC. На страната AC е избрана точка N, а на страната BC – точка M така, че $AN = \frac{1}{2}NC$ и $CM = \frac{1}{2}MB$. Точката P е среда на BN, а правата през P, успоредна на AB, пресича AM в точка Q. Да се намери $\frac{AQ}{QM}$.

Решение. а) от успоредността следва, че $S_{AED} = S_{BDE}$ и оттук

$$\frac{AD}{DC} = \frac{S_{AED}}{S_{DEC}} = \frac{S_{BDE}}{S_{DEC}} = \frac{BE}{EC}.$$



б) Нека правата PQ пресича AC в точка X, а BC в точка Y.

В триъгълника ABN от а) следва, че $\frac{AX}{XN} = \frac{BP}{PN} = 1$, т.е. X е среда на AN. Следователно $\frac{AX}{XC} = \frac{1}{5}$. В триъгълника ABC от а) следва, че $\frac{BY}{YC} = \frac{AX}{XC} = \frac{1}{5}$. Следователно $\frac{BY}{YM} = \frac{1}{3}$.

В триъгълника ABM от а) следва, че $\frac{AQ}{QM} = \frac{BY}{YM} = \frac{1}{3}$.

Задача 2. Трима рибари провели следния разговор.

Петър: Кирил улови само две риби. Васко улови една риба повече от Кирил. Ние с Васко общо уловихме 8 риби повече от Кирил. Аз улових повече риби от Кирил и Васко заедно.

Кирил: Васко не улови нищо. Петър лъже, че аз съм уловил само две риби. Аз и Петър сме уловили различен брой риби. Васко и Петър уловиха общо 13 риби.

Васко: Кирил улови най-много риби от всички нас. Аз улових три риби повече от Петър. Кирил лъже, като казва, че аз не съм уловил нищо. Петър и Кирил уловиха по равен брой риби.

Всеки от рибарите е казал две верни и две грешни твърдения. По колко риба е уловил всеки от тях?

Решение. Да означим твърденията на рибарите с първата буква на името и поредния им номер.

Ако К1 е вярно, т.е. Васко не е уловил риба, то В2 и В3 са лъжи, следователно В1 и В4 са истина; последното е невъзможно. Следователно К1 е лъжа, а В3 е истина.

Ако В4 е вярно, т.е. Петър и Кирил са уловили равен брой риби, то К3 и П4 са лъжи. Следователно верните твърдения на Кирил са К2 и К4. Тогава П1 е лъжа и верните твърдения на Петър са П2 и П3. Но от П3 следва, че Васко е уловил 8 риби; сега от П2

следва, че Кирил е уловил 7 риби и К4 е лъжа; противоречие. Следователно В4 е лъжа, а К3 е истина.

Ако П1 е истина, т.е. Кирил е уловил 2 риби, то грешните твърдения на Кирил са К1 и К2, т.е. К4 е истина; Васко и Петър са уловили общо 13 риби. Също, В1 е лъжа, значи верните твърдения на Васко са В2 и В3, т.е. Васко е уловил с 3 риби повече от Петър. Получаваме, че Васко е уловил 8, а Петър – 5 риби. Но тогава Петър има само едно вярно твърдение; противоречие. Следователно П1 е лъжа, а К2 е истина.

Ако В1 е истина, т.е. Кирил е уловил най-много риби, то П2 и П4 са лъжа и грешните твърдения на Петър стават три; противоречие. Следователно В1 е лъжа, т.е. верните твърдения а васко са В2 и В3, т.е. Васко е уловил с 3 риби повече от Петър. Тогава П4 е лъжа и верните твърдения на Петър са П2 и П3, т.е. Васко е уловил една риба повече от Кирил и Петър и Васко общо са уловили с 8 риби повече от Кирил. Оттук лесно намираме, че Петър е уловил 7 риби, Васко – 10 и Кирил – 9 риби.

Задача 3. Хиперделители на дадено естествено число N са всички делители на числата, които се получават, като се изтрият няколко (възможно и 0) цифри отляво и отдясно в десетичния запис на N.

Например, хиперделителите на 132 са делителите на 132, 13, 32, 1, 3 и 2, т.е. числата от множеството $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 13, 16, 32, 132\}$.

а) Докажете, че има безкраен брой числа, на които 2018 НЕ Е хиперделител.

б) Докажете, че има краен брой числа, на които 2019 НЕ Е хиперделител.

Решение. а) Достатъчно е да забележим, че 2018 не е хиперделител на всяко число, записано само с нечетни цифри.

б) Ще докажем, че всяко число с поне 2019 цифри има 2019 за свой хиперделител. Достатъчно е да докажем, че 2019 е хиперделител на всяко число с 2019 цифри.

Нека числото е $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_{2019}}$.

Разглеждаме числата

$$a_{2019},\ \overline{a_{2018}a_{2019}},\ \overline{a_{2017}a_{2018}a_{2019}}\ \dots \overline{a_1 a_2 \dots a_{2019}}.$$

Ако някое от тях се дели на 2019, то 2019 е хиперделител на N (тъй като те се получават чрез изтриване на цифри отляво на N).

Ако сред тези 2019 числа няма кратно на 2019, то две от тях дават един и същ остатък при деление на 2019 и значи разликата им се дели на 2019, т.е.

$$\overline{a_k \dots a_{2019}} - \overline{a_p \dots a_{2019}} = \overline{a_k \dots a_{p-1}0 \dots 0} = \overline{a_k \dots a_{p+1}}.10^{2020-p}$$

се дели на 2019. Тъй като 2019 и 10 са взаимнопрости, то 2019 е делител на $\overline{a_k \dots a_{p+1}}$ и следователно хиперделител на N.

Следователно числата, на които 2019 не е хиперделител, имат по-малко от 2019 цифри в записа си, т.е. са краен брой.

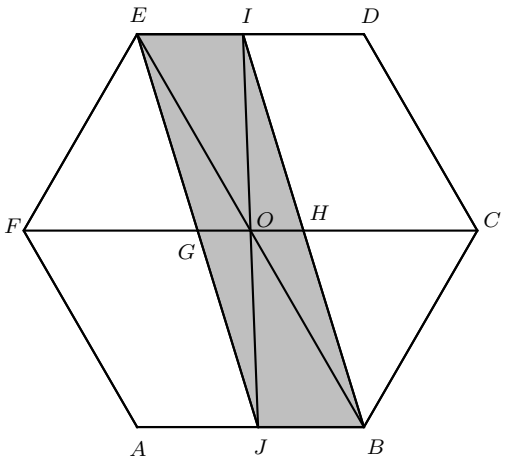
Задача 4. Даден е правилен шестоъгълник $ABCDEF$ с лице S. На диагонала CF са избрани точки G и H така, че $CH = FG = k.CF$, където $k < \frac{1}{2}$. Правата BH пресича страната DE в точката I, а EG пресича AB в точката J.

а) Ако $k = \frac{1}{3}$, намерете лицето на успоредника $BIEJ$.

б) Ако лицето на успоредника $BIEJ$ е равно на $40\%S$, намерете k.

в) Ако лицето на успоредника $BIEJ$ е $k.S$, намерете k.

Решение. Да означим лицето на $ABCDEF$ с S.



а) В този случай точките G и H разделят диагонала CF на три равни части. Диагоналите CF, BE и IJ се пресичат в центъра O на шестоъгълника. Освен това $FG = 2GO$. Следователно $S_{GOE} = \frac{1}{3}S_{FOE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}S = \frac{1}{18}S$. Лесно се вижда, че $S_{BIEJ} = 8S_{GOE} = \frac{4}{9}S$.

б) Ако означим $S_{GOE} = x$, то $S_{BIEJ} = 8x = \frac{2}{5}S$, т.е. $x = \frac{1}{20}S$. Тогава $S_{FGE} = \frac{1}{6}S - \frac{1}{20}S = \frac{7}{60}S$ и оттук $\frac{FG}{GO} = \frac{\frac{7}{60}S}{\frac{1}{20}S} = \frac{7}{3}$. Сега лесно следва, че $k = \frac{7}{20}$.

в) Както в б), означаваме $S_{GOE} = x$; $S_{BIEJ} = 8x = kS$, т.е. $x = \frac{k}{8}S$. Тогава $S_{FGE} = \frac{1}{6}S - \frac{k}{8}S$ и $\frac{FG}{GO} = \frac{\frac{1}{6}S - \frac{k}{8}S}{\frac{k}{8}S} = \frac{4-3k}{3k}$. Сега лесно следва, че $k = \frac{FG}{2(FG+GO)} = \frac{4-3k}{8}$ и намираме $k = \frac{4}{11}$.

Задача 5. На дъската е написано числото m. Мая трябва да получи 1 с помощта на краен брой от следните две операции: ако на дъската е записано числото n, то може да се замести с $n+1$ или $\frac{n}{3}$, като втората операция е разрешена само ако n се дели на 3. Възможно ли е тя да получи 1 така, че някоя от цифрите 0, 1, ..., 9 да не се появи на дъската на никоя от стъпките (включително началната), ако:

а) $m = 2019$ б) $m = 2018$ в) $m = 2181$

Решение. а) **Отговор: Да!.** Първо увеличаваме до 2025, после делим на 3 докато достигнем 25 (минавайки през 675, 225, 75), после през 26 и 27, после 9, после 3 и накрая 1.

б) **Отговор: Не!.** Ще наричаме цифра *забранена*, ако непременно се появява на дъската. Цифрите 2, 0, 1 и 8 са забранени отначало. Тъй като 1 може да се получи само от 3, цифрата 3 е също забранена. Освен това, за първата стъпка сме длъжни да прибавим 1, откъдето 9 е също забранена.

Сега показваме, че 4 е забранена. Наистина, за да не я получим като последна цифра трябва да приложим деление на 3 най-късно при 2022, при което ще получим или 673 (което с непременно прибавяне на 1 води до 674), или 674.

Аналогично 5 е забранена – или при 2025, или при $2019 : 3 = 673$, последвано от две задължителни прибавяния на единици.

Цифрата 6 също е забранена – или при 2026, или при делене на някое от 2019, 2022 и 2025 на 3 – такова винаги дава число, започващо с 6.

Аналогично 7 е забранена – или при 2027, или при делене на някое от 2019, 2022 и 2025 на 3 – такова винаги дава число с цифра на десетиците 7.

в) **Отговор: Да!.** Добавяме единици до 2187 (това използва цифрите $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$)

и после само на 3, преминавайки през 729, 243, 81, 27, 9, 3 и 1. Цифрата 0 не се е появила.

Задача 6. Да се намерят всички прости числа p, за които числото

$$2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} + 8$$

се дели на 13.

Отговор: $p = 3$**.** Случаите $p = 2, 3$ се проверят директно. За $p \geq 5$ имаме, че $p^2 - 1$ се дели на 12, понеже точно едно от $p - 1$ и $p + 1$ се дели на 4 и точно едно на 3. Чрез директна проверка имаме $2^{12} \equiv 3^{12} \equiv 4^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ и значи $2^{p^2} \equiv 2 \pmod{13}$, подобно за 3 и 4. Следователно изразът винаги дава остатък 4.

Задача 7. На изложба има 50 картини, за всяка от които са използвани k цвята. Известно е, че всеки 20 картини имат поне един общ цвят, както и че няма цвят, който да се среща във всички картини. Да се намери най-малката възможна стойност на k.

Отговор: $k = 21$**.** Да допуснем, че $k \leq 20$ и нека цветовете са $1, 2, \ldots, k$. Понеже няма цвят, който да се среща навсякъде, задължително имаме картина P_1, в която няма цвят 1, картина P_2, в която няма цвят 2 и т.н. до картина P_k, в която няма цвят k. Но тогава картините $P_1, P_2, \ldots, P_k$, заедно с кои да е други $20 - k$ на брой картини нямат общ цвят, противоречие.
За $k = 21$ е достатъчно да изберем 21 картини, една от които не съдържа цвят 1, друга не съдържа цвят 2 и т.н. до 21-вата да не съдържа цвят 21; и нека в другите 29 картини се срещат всички цветове.

Задача 8. Отбор по шах се състои от n момчета и n момичета. Два отбора играли турнир, като всеки състезател от единия отбор изиграл една партия с всеки състезател от другия отбор. Когато състезателите са от един пол за победа се дава 1 точка, за равен се дават по $0,5$ точки на двамата и за загуба не се дават точки. Когато играят момче с момиче при победа за момчето то получава 1 точка, а момичето получава 0 точки, при равен момчето получава $0,5$ а момичето получава 1 точка, а при победа на момичето тя получава $1,5$ точки, а момчето получава 0 точки.

Да се намери най-малкото n, за което е възможно отборът с по-малко победи да има повече точки?

Отговор: $n = 3$**.**