Десети български фестивал на младите математици

Трети кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. а) Съществува ли множество A от 8 естествени числа, всяко от които е по-малко от 100 и никои две подмножества на A нямат равни суми от елементите си.

б) Съществува ли множество A от 9 естествени числа, всяко от които е по-малко от 100 и никои две подмножества на A нямат равни суми от елементите си.

Отговор: а) Да. б) Не. а) $\{3, 6, 12, 24, 48, 95, 96, 97\}$ върши работа.

б) Нека числата са $x_1, \ldots, x_9$. Тогава сборовете

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_9$$

са различни, с еднаква четност и различни от 0. Тогава най-малката стойност на два от модулите на горните суми са 1 (за 1 и -1), следващите два са най-малко 3 и т.н., т.е.

$$\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_9)^2 \geq 2(1^2 + \cdots + 511^2) = 512.87381$$

От друга страна сумата по-горе е равна на

$$512(x_1^2 + \cdots + x_9^2)$$

тъй като удвоените произведения се съкращават. Следователно

$$x_1^2 + \cdots + x_9^2 \geq 87381$$

и понеже всики събираеми са по-малки от 100, получаваме, че те са не по-малки от 80. Изваждаме от всички числа по 80 и разглеждаме полученото множество от 9 числа от 0 до 20 и като разгледаме всички подмножества от по 4 елемента получаваме, че те са повече от възможно най-голямата сума от 80.

Задача 2. За всяко естествено число k нека $S(k)$ означава сбора от цифрите на k. Да се намери най-малкото естествено число n за което $S(n) - S(2n) = 2019$.

Отговор: $\underbrace{555\ldots56}_{505}$**.** Лесно се вижда, че разликата между съответните цифри на n и $2n$ е най-много 5. Ако е точно 5, то това е или цифрата на единиците, или предишната цифра е по-малка от 5. Тогава разликата между сбора на двете цифри (5 и предишната) на n и на $2n$ е не-повече от 5. Следователно ни трябва поне 505 цифрено число и лесно се вижда, че това е $\underbrace{555\ldots56}_{505}$.

Задача 3. На Математическите боеве ученици решавали 46 задачи, като всеки ученик решил точно 3 задачи. За всеки двама има най-много една задача, която е решена и от двамата. Да се докаже, че има 10 задачи, никои три от които не са решени от един ученик.

Решение. Нека t е най-голямото число със свойството: Има t задачи, никои три от които не са решени от един ученик. Да допуснем, че $t \leq 9$ и да означим множеството от тези t задачи с A. Тъй като t е най-голямото число с това свойство, за всяка задача $x \notin A$

съществуват две задачи $y, z \in A$, такива, че има ученик решил задачи x, y и z (в противен случай ще добавим задача x към A и ще увеличим t).

По този начин на всяка задача извън A съответства двойка от задачи от A. При това на различни задачи извън A съответстват различни двойки от A (в противен случай ще има ученик решил повече от 3 задачи). Тъй като $t \leq 9$, то двойките в A са най-много $\binom{9}{2} = 36$, а извън A има поне 37 задачи и от $37 > 36$ получаваме противоречие.

Задача 4. Реалните числа a, b, c, d са различни и изпълняват равенствата

$$ac = bd \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4.$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$.

Решение. От дадените имаме $(a + c)(b + d) = 4ac$. Да отбележим, че $ac = bd < 0$ – иначе, $(a + c)(b + d) = 4ac > 0$ и тогава $(a + c)(b + d) = |a + c||b + d| > 2\sqrt{ac}2\sqrt{bd} = 4ac$, противоречие (неравенството е строго, понеже a, b, c, d са различни). Сега от неравенството между средноаритметично и средногеометрично получаваме

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{ac} = \frac{(a + c)^2 + (b + d)^2}{ac} - 4 \leq -2\frac{(a + c) + (b + d)}{ac} - 4 = -12$$

Равенство се достига например за $a = 1$, $b = -1$, $c = -3 - 2\sqrt{2}$, $d = 3 + 2\sqrt{2}$.

Задача 5. Нека $2a + 3b + 5c = 0$. Докажете, че уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ има корен в интервала $[0; 1]$.

Решение. Ако $f(x) = ax^2 + bx + c$, то $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c$ и $f(0) = c$, така че $(9/2)f(2/3) + (1/2)f(0) = 2a + 3b + 5c = 0$. Ако тук $f(2/3) \geq 0$, то $f(0) \leq 0$. Ако $f(2/3) < 0$, то $f(0) > 0$. От графиката на квадратната функция следва, че има корен в интервала $[0; 2/3]$.

Задача 6. Даден е триъгълник ABC. Точките A_1 и B_1 са от страните BC и AC съответно. Точките P и Q са от отсечките AA_1 и BB_1, като $PQ \parallel AB$. Точката P_1 е от правата PB_1, като B_1 е между P и P_1 и $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Точката Q_1 е от правата QA_1, като A_1 между Q и Q_1 и $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle ABC$. Правите AA_1 и BB_1 пресичат описаната около триъгълника ABC окръжност в точките A_0 и B_0, съответно. Да се докаже, че точките A_0, B_0, P, Q, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност.

Решение. Нека $AA_1 \cap BB_1 = R$. Понеже $PQ \parallel AB$ и ABA_0B_0 е вписан четириъгълник, имаме $\sphericalangle B_0QP = 180° - \sphericalangle RQP = 180° - \sphericalangle ABB_0 = 180° - \sphericalangle PA_0B_0$ и следователно PQB_0A_0 е вписан. Също, $\sphericalangle B_1B_0C = \sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1P_1C$ и така точките B_0, B_1, P_1 и C лежат на една окръжност. Сега ако $\sphericalangle B_0P_1P = 180° - \sphericalangle B_1CB_0 = 180° - \sphericalangle ABB_0 = 180° - \sphericalangle PQB_0 = \sphericalangle B_0QP$, откъдето P, Q, P_1 и B_0 лежат на една окръжност. Аналогично P, Q, Q_1 и A_0 лежат на една окръжност, с което задачата е решена.

Задача 7. Точките P и Q от страната AB на триъгълника ABC са такива, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$. Точките M и N са съответно от лъчите CP и CQ и изпълняват равенството $\frac{CP}{PM} = \frac{QN}{CQ}$. Да се докаже, че правите AM и BN се пресичат върху описаната около триъгълника ABC окръжност.

Решение. Нека $S = AM \cap BN$ и да означим $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACP = \beta$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCQ = \alpha$. Тогава $\triangle ACP \sim \triangle CBQ$, откъдето (използвайки и даденото)

$$\frac{AP}{PM} = \frac{\frac{CP.CQ}{QB}}{PM} = \frac{NQ}{QB}$$

Нещо повече, $\sphericalangle APM = \sphericalangle BQC = \alpha + \beta$. Следователно $\triangle NQB \sim \triangle APM$. Оттук

$$\sphericalangle ASB = 180^\circ - \sphericalangle SAB - \sphericalangle SBA = 180^\circ - \sphericalangle MAP - \sphericalangle AMP =$$

$$= \sphericalangle APM = \beta + \alpha = 180^\circ - \sphericalangle ACB$$

с което задачата е решена.

Задача 8. а) Намерете всички множества S от естествени числа със следното свойство: за всеки три числа a, b и c от S числото $\dfrac{ab+c}{(a,c)}$ също е от S.

б) Намерете всички множества S от естествени числа със следното свойство: за всеки три числа a, b и c от S, ако числото $\dfrac{ab-c}{(a,c)}$ е естествено, то също е от S.

С (a,c) означаваме най-големия общ делител на естествените числа a и c.

Решение. а) Имаме $\dfrac{ab+c}{(a,c)} \geq b+1$, като равенство се достига само при $a = c$. Следователно всички търсени множества са $S = \{n \geq t\}$, където t е фиксирано естествено число.

б) **Отговор: 1 или всички естествени числа.** При $a = c$ имаме $\dfrac{ab-c}{(a,c)} = b - 1$, т.е. ако S съдържа дадено естествено число, то S съдържа и всички по-малки от него. Ако $S \neq \{1\}$, то $2 \in S$ и тогава $a = b = 2, c = 1$ дава $3 \in S$ и т.н ще получим, че в S има произволно големи числа.